Műszaki folyamatok közgazdasági elemzése
Előadásvázlat
2013. szeptember 19.

Termelés 1:
Technológiai összefüggések modellezése

I. Alapfogalmak

A vállalkozások célja a profit maximalizálása, ezt a célt a termelésen keresztül érhetik el. A termeléshez termelési tényezők szükségesek.

Termelés: termékek átalakítása más termékekké.

Termelési tényezők (inputtényezők):
a) föld (jele: A),
b) munka (jele: L),
c) tőke (jele: K) – maga is termelés során keletkezik,
d) vállalkozói ismeretek (jele: H).

Kibocsátás (Össztermék, Output): a termelési tényezők felhasználásával előállított – az átalakított – termék. Jele: q.

Vállalati döntéseknek korlátozó tényezői vannak:
1. időkorlát
   - rövid táv: valamely termelési tényező mennyisége rögzített,
   - hosszú táv: minden termelési tényező mennyisége szabadon változtatható.
2. technológiai korlát
3. költségkorlát.

II. Technológiai korlát

Termelési halmaz: bizonyos mennyiségű kibocsátás bizonyos mennyiségű inputot igényel, ezen input-output kombinációkat termelési halmaznak nevezzük.

Termelési függvény: a felhasznált termelési tényezők mennyiségei és a maximálisan előállítható output közötti kapcsolatot írja le; a technológiát jeleníti meg a termelési modellekben (a termelési halmaz határvonala); jele $F(\cdots)$;

Tehát:

$$q = F(A, L, K, H)$$

Gyakorló feladat:

Mondjon példákat különböző időtávú termelési eljárásokra! Nevezze meg a változó, illetve változatlan mennyiségű termelési tényezőket!

III. A termelési függvény

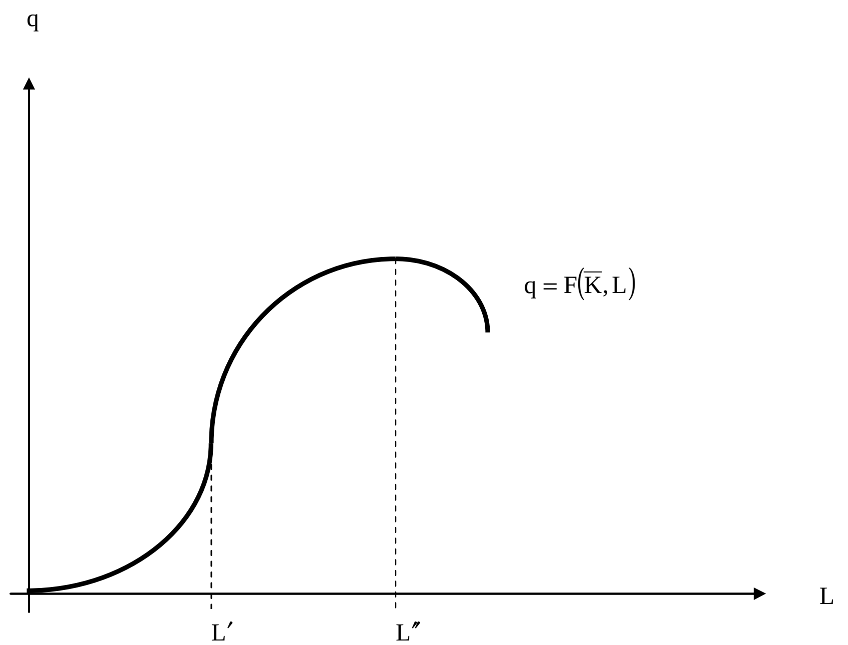
Vizsgálatainkat többnyire két termelési tényezőre korlátozzuk, munkára és tőkére. A termelési függvény ekkor tehát

$$q = F(L, K).$$

Ha valamelyik termelési tényező mennyiségét, pl. a tőkemennyiséget állandónak vesszük ($K = \overline{K}$), akkor az ún. *parciális (rövid távú) termelési függvénnyel* lesz dolgunk.

1. A parciális termelési függvény – egy termelési tényező változása

A parciális termelési függvény alakja:



Látható, hogy három különböző szakasza van a termelési függvénynek

a) Ha $0 \le L \le L'$, akkor minden újabb munkaegység egyre nagyobb növekményt eredményez a kibocsátásban;
b) Ha $L' \le L \le L''$, akkor minden újabb munkaegység egyre kisebb növekményt eredményez a kibocsátásban;
c) Ha $L'' < L$, akkor a munkaráfordítás növelése ellenére csökken a kibocsátás – ez a szakasz már technikai értelemben véve nem hatékony;

Ennek oka a másik termelési tényező relatív vagy abszolút szűkösségében keresendő:

a) minden újabb munkaegység alkalmazása a szélesedő munkamegosztás (specializálódás) révén nagyon hatékony; egyre hatékonyabban használják ki a rendelkezésre álló tőkejavakat;
b) minden újabb munkaegység növeli ugyan még az össztermékét, de kisebb mértékben, mint az előző munkaegység; hasonló folyamat, mint a fogyasztásnál a telítettség növekedése: itt a rendelkezésre álló, állandó mennyiségű tőkejavak kihasználása a telítettséghez tart;
c) ebben a helyzetben az alkalmazott munkamennyiség meghaladja azt a mértékét, amely a meglévő teljes tőkemennyiség használatához szükséges; ez a gazdálkodás szempontjából már nem releváns tartomány.

A különböző szakaszokat a $q = F(\overline{K}, L)$ termelési függvény meredekségével jellemezhetjük:

a) Ha $0 \le L \le L'$, akkor a munkaráfordítás növelésével nő a termelési függvény meredeksége;
b) Ha $L' \le L \le L''$, akkor a munkaráfordítás növelésével csökken a termelési függvény meredeksége, de pozitív marad;
c) Ha $L'' < L$, akkor a munkaráfordítás növelésével csökken a termelési függvény meredeksége és negatív előjelű lesz.

Gyakorló feladat:

Gondolja végig, mi a különbség a technikailag és a gazdaságilag hatékony termelési eljárás között!

A hasznossági függvényhez hasonlóan – ahol az összhaszon és a határhaszon fogalompárral érveltünk – a termelési függvény meredekségét itt is a marginalizmus alapján értelmezzük.

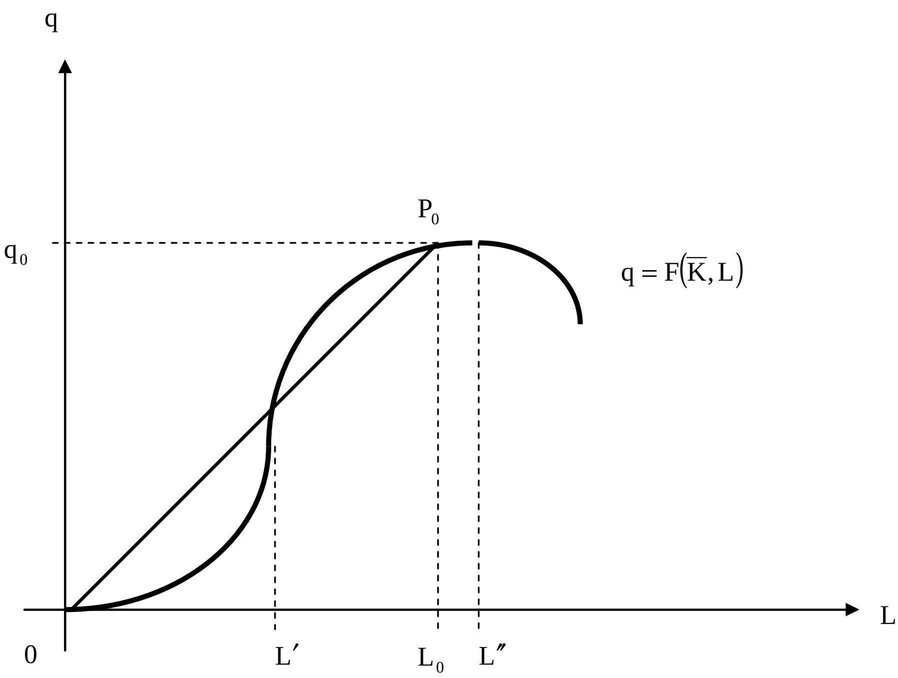
A *munka határterméke* (jele: MP_L) az az össztermékönövekmény, amely egy újabb munkaegység bevonásával keletkezik; geometriai jelentés: a termelési függvény meredeksége; matematikailag meghatározható a termelési függvény munka szerinti első deriváltjával, azaz $MP_L = \frac{\partial q}{\partial L} = \frac{\partial F}{\partial L}$.

Az előzőekből következik, hogy a munka határterméke a $0 \le L \le L'$ szakaszán nő, a $L' \le L \le L''$ szakaszán csökken, de pozitív és a $L'' < L$ tartományban csökken és negatív, tehát: a munka határterméke az L' munkamennyiség mellett maximális és az L'' munkaráfordítás esetén zérus. Ld. a következő ábrát.

Gyakorló feladat:

Mit jelent és hogyan határozható meg a tőke határterméke?

A munka határterméke mellett a *munka átlagtermékét* is definiálhatjuk: a munkaegységre átlagosan jutó kibocsátás, jele: AP_L; meghatározható a kibocsátás és a munkaráfordítás hányadosaként, $AP_L = \frac{q}{L}$, geometriai jelentése: a termelési függvény egy pontját és az origót összekötő egyenes meredeksége (ld. a következő grafikont: a P_0 pontban a termelési függvény meredeksége éppen $\frac{q_0}{L_0}$).



Könnyen belátható, hogy az átlagtermék növekszik – egészen addig, amíg a mértékét kifejező egyenes egy pontban nem érinti a termelési függvényt; utána csökkenni kezd. Ebben az érintési pontban viszont a szóban forgó egyenes meredeksége szükségképpen egybeesik a munka határtermékét kifejező görbe meredekségével, azaz *az átlagtermék ott maximális, ahol egyenlő a határtermékkel*.

Ennek magyarázata a következő: Ha a határtermék nő, akkor minden újabb munkaegység felhasználásával nő a kibocsátás – mégpedig nagyobb mértékben, mint az előző munkaegység bevonása esetén. Ez természetesen az átlagterméket is növeli. Egy bizonyos ponton – fenti példánkban L'-től kezdve – a határtermék csökkenni kezd, vagyis az össztermék még mindig nő, de kisebb mértékben, mint amilyenben ezt az előző munkaegység növelte. Az átlagtermék egészen addig nőni fog, míg a csökkenő határtermék nagyobb, mint a mindenkori átlagtermék, hiszen addig az össztermékhez mindig több jön hozzá, mint amennyi az addigi átlag. Ha a határtermék már arra a szintre csökkent, mint amekkora az aktuális átlagtermék, akkor épp az átlagos növekménnyel nő a kibocsátás, vagyis az átlagtermék nem változik. Utána, amikor tehát a határtermék kisebb, mint az átlagtermék, az újabb munkaegység az átlagnál kisebb mértékben növeli az összterméket, s így az átlagtermék is csökken. Tehát az átlagtermék addig nő, míg a határterméknél kisebb; ha viszont a határtermék kisebb, mint az átlagtermék, akkor az utóbbi csökkenni fog – következésképpen: ha a határtermék egyenlő az átlagtermékkel, akkor az átlagtermék maximális.

Vegyük észre, hogy a határtermék és az átlagtermék hányadosa a termelés munka szerinti rugalmassága:

$$\frac{MP_L}{AP_L} = \frac{\frac{\partial q}{\partial L}}{\frac{q}{L}} = \frac{\partial q}{\partial L}\frac{L}{q} = \varepsilon_{qL}\,.$$

Tehát:

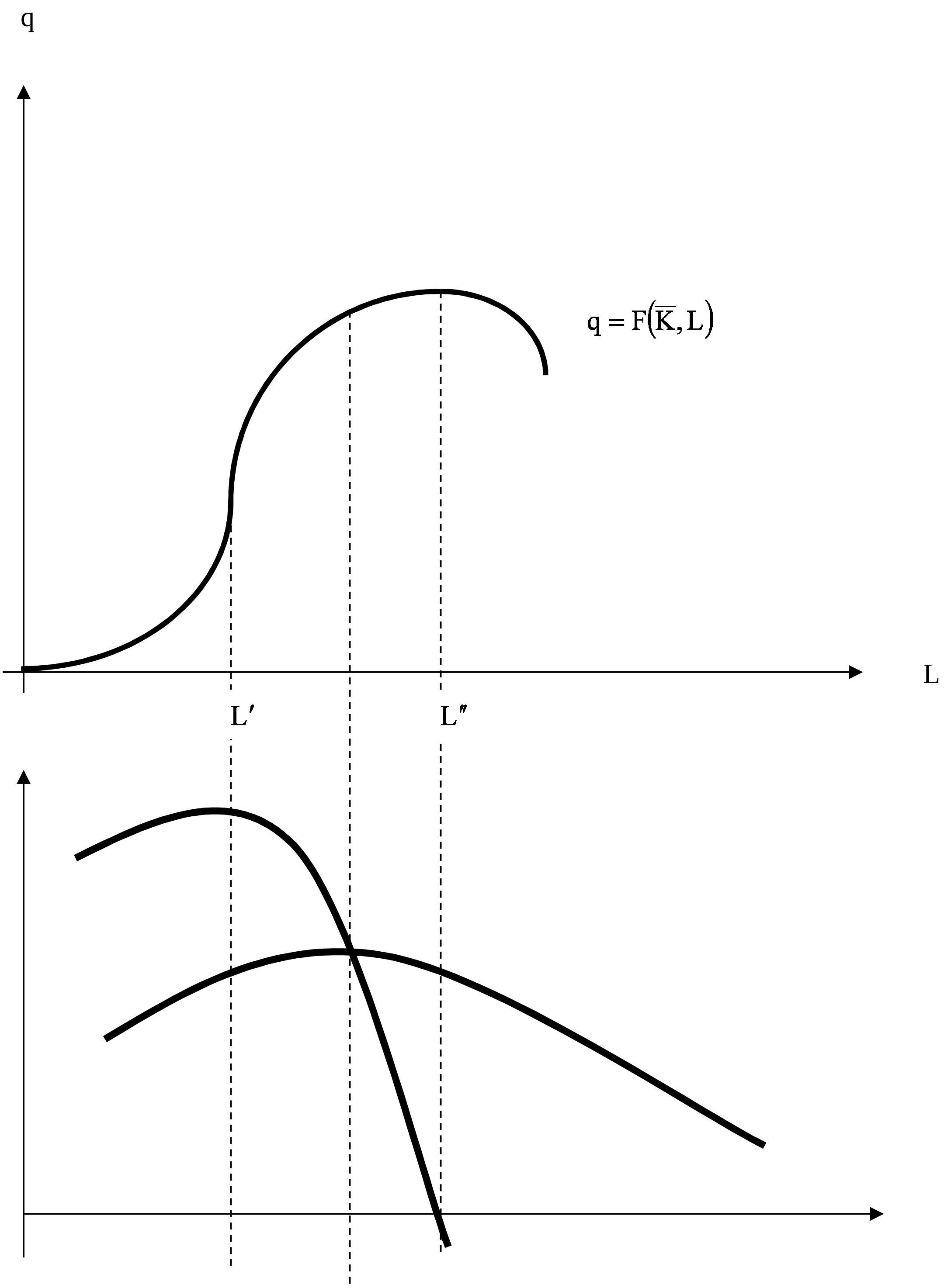
ha $0 \le L \le L'$, akkor $MP_L > AP_L$, vagyis $\varepsilon_{qL} > 1$,

ha $L = L'$, akkor $MP_L = AP_L$, vagyis $\varepsilon_{qL} = 1$,

ha $L' \le L \le L''$, akkor $MP_L < AP_L$, vagyis $\varepsilon_{qL} < 1$.

Gyakorló feladat:
Értelmezze és adja meg a termelés tőke szerinti rugalmasságát!

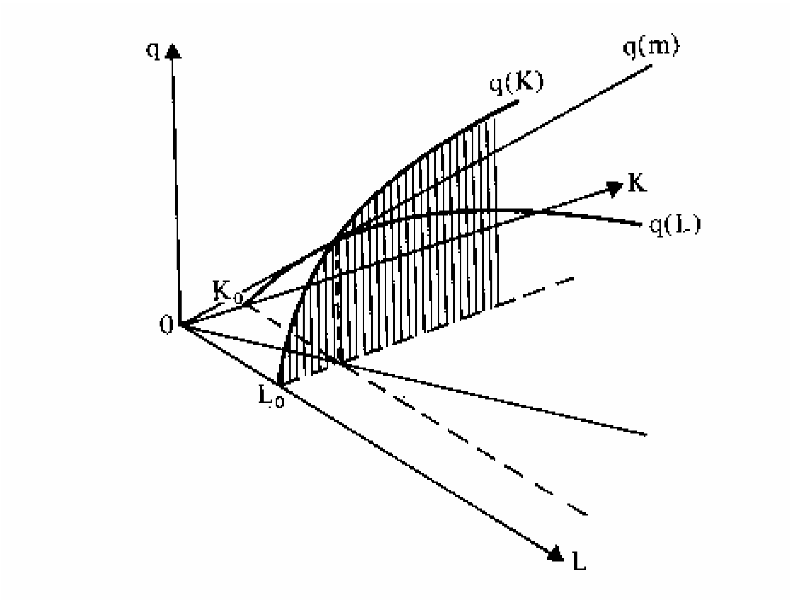
Grafikusan összegezve a fenti összefüggéseket:



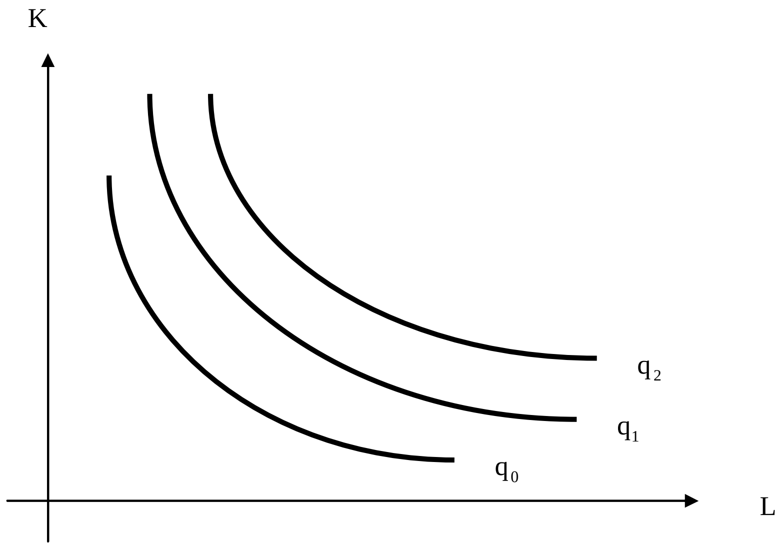
Gyakorló feladat:
A fenti ábrán jelölje a hiányzó tengelyeket, döntse el, hogy melyik egyenes mutatja a munka határtermék függvényét, és melyik jelöli az átlagtermék függvényt!

2. A kéttényezős termelési függvény

A $q = F(L, K)$ két-tényezős termelési függvény – a már említett hasznossági függvényhez hasonlóan – csak 3-dimenziós térben ábrázolható.



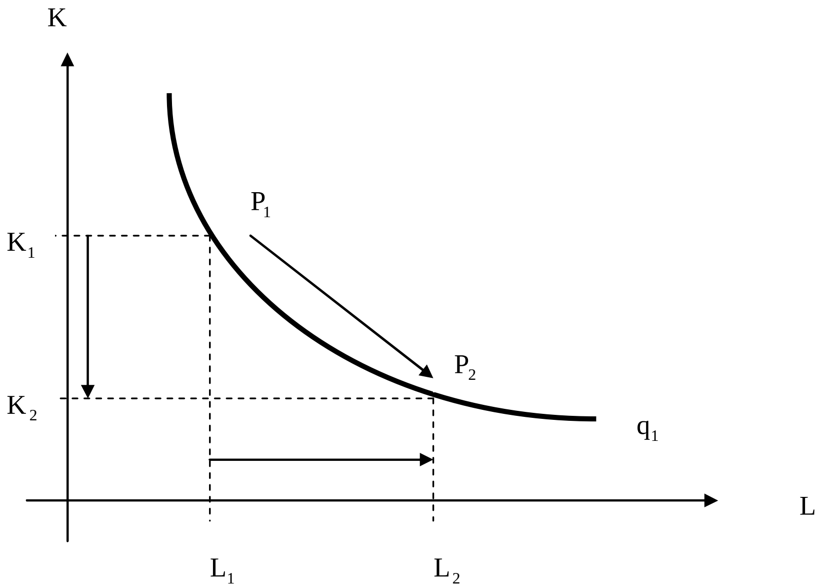
Ebből levezethetők – újra csak a hasznosságelmélet mintájára – az *isoquant-görbék*, azaz az összes olyan tőke-munka-kombináció, amelyekkel ugyanazt a kibocsátást lehet elérni. Természetesen itt is végtelen sok isoquant-görbe létezik, amelyek nem metszik egymást.



A technológia tulajdonságai:

- monotonitás: ha egyik input mennyiségét sem csökkentem, az output sem lehet kevesebb,
- konvexitás: ha Q kibocsátást elő tudom állítani (K_1, L_1) és (K_2, L_2) inputkombinációval is, akkor legalább ugyanez a termékmennyiség előállítható a két inputkombináció súlyozott átlagaként is.

Valamely isoquant-görbe mentén haladva változatlan kibocsátás mellett változik a tőke-munka-arány. Ha pl. a P_1 pontból a P_2 pontba átmegyünk, akkor a tőkeállomány K_1-ről K_2-re csökken, míg a munkaráfordítás pedig L_1-ről L_2-re nő, vagyis a $\Delta K = K_1 - K_2$ tőkemennyiséget a $\Delta L = L_2 - L_1$ munkamennyiséggel helyettesítettük. A fogyasztáselméletből ismert helyettesítési ráta, illetve ha a tőke- és munkamennyiségek változásai végtelen kicsik: helyettesítési határráta mintájára beszélhetünk most a $\frac{\Delta K}{\Delta L} = \frac{K_1 - K_2}{L_1 - L_2} < 0$ kifejezést illetően a *technikai helyettesítés rátájáról* (RTS), ill. ha $\Delta K \to 0$ vagy $\Delta L \to 0$ a *technikai helyettesítés határrátájáról* (MRTS=$\frac{dK}{dL}$ - vagyis ha az egyik inputtényezőből kevesebbet használok, mennyivel kell többet használnom a másikból, hogy a termékmennyiség NE változzon).



Gyakorló feladat:
Az ún. jól viselkedő isoquant görbék esetén mutassa meg grafikusan, hogy a technikai helyettesítési határráta csökkenő.

Gyakorló feladat:
Miben különbözik a csökkenő határtermék és a csökkenő helyettesítési határráta?

IV. Mérethozadék – ha mindkét inputtényező mennyisége arányosan változik

Eddig azt vizsgáltuk meg, hogy mi történik, ha egy vagy két termelési tényező mennyisége tetszőleges mértékbenváltozik. De mi van akkor, ha minden felhasznált termelési tényezőt egyszerre arányosan növeljük? Ha mondjuk egy vállalat a meglévő üzemek mellé még egy ugyanolyan üzemet, ugyanazzal a gépparkkal és ugyanazzal a munkáslétszámmal létesít, akkor azt lehetne várni, hogy a termelési eredmény is annyival nő, mint amennyit egy gyár korábban előállított. Ha viszont a megváltoztatott termelési tényezők mellett még egy másik, állandó mennyiségben a rendelkezésre álló termelési tényező létezik, amely ilyen arányos változásoknál szűk keresztmetszetként bizonyul, akkor a kibocsátás minden bizonnyal kisebb mértékben változik.

Ezeket a jelenségeket a méretgazdaságosság, illetve a mérethozadék fogalmával írjuk le. Az ennek megfelelő matematikai kategória a *homogén függvény* fogalma. Valamely $z = f(x, y)$ függvényről azt mondjuk, hogy *r-ed fokú homogén*, ha igaz a következő összefüggés:

$$\lambda^r z = f(\lambda x, \lambda y).$$

Ha a fenti példát a vállalatról végiggondoljuk, akkor látjuk, hogy ez egy elsőfokú homogén technológiát tételezett fel, hiszen ha $r = 1$, akkor $\lambda z = f(\lambda x, \lambda y)$, vagyis akkor a kibocsátás ugyanolyan arányban változik, mint amilyen arányban megváltoztattuk az összes termelési tényezőt. Ebben az esetben állandó mérethozadékról beszélünk. Növekvő mérethozadékkal van dolgunk, ha a kibocsátás a tényezőmennyiségekénél nagyobb arányú változást mutat, azaz ha $r > 1$; csökkenő mérethozadék érvényesül (ez volna a másik fenti példa), ha $r < 1$.

V. Költségkorlát

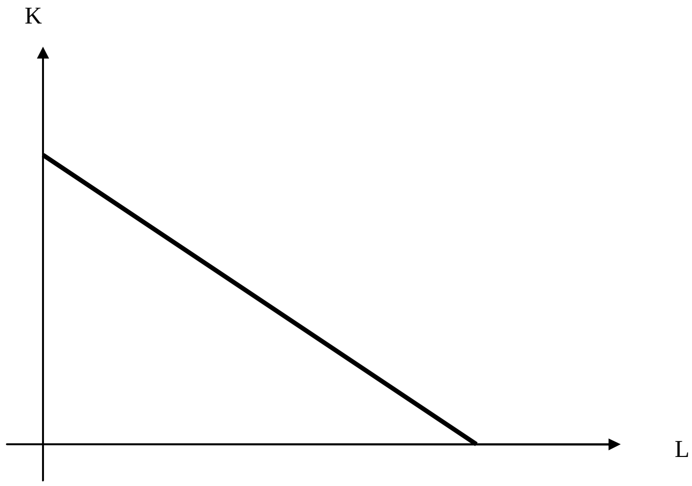
Ha a két termelési tényező (tőke és munka) árai – P_K és P_L – adottak, akkor valamely (K, L) tőke-munka-kombinációért a

$$TC = P_K K + P_L L$$

összeget kell fizetni, amely a szóban forgó tényezőkombináció segítségével előállított termékmennyiség összköltségével (TC = total cost) egyenlő. Amennyiben a fenti összefüggésben az összköltséget állandónak tételezzük fel, és K-ra átrendezzük, azaz

$$K = \frac{TC}{P_K} - \frac{P_L}{P_K} L,$$

akkor az ún. *isocost-görbe* egyenletét kapjuk. Ábrázolva a következő adódik:

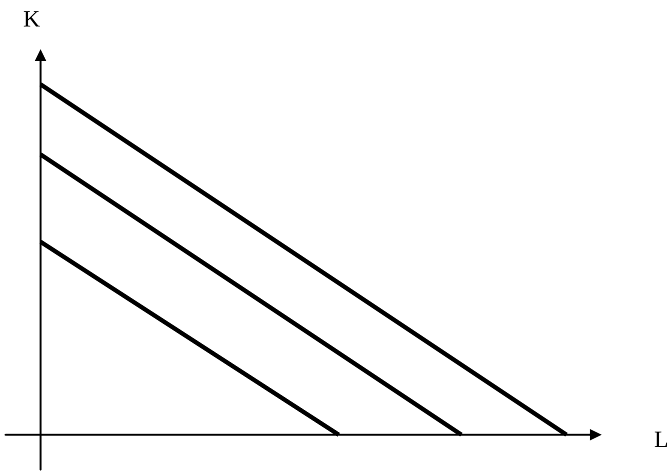


Gyakorló feladatok:

Adja meg az isocost-görbe közgazdasági értelmezését!

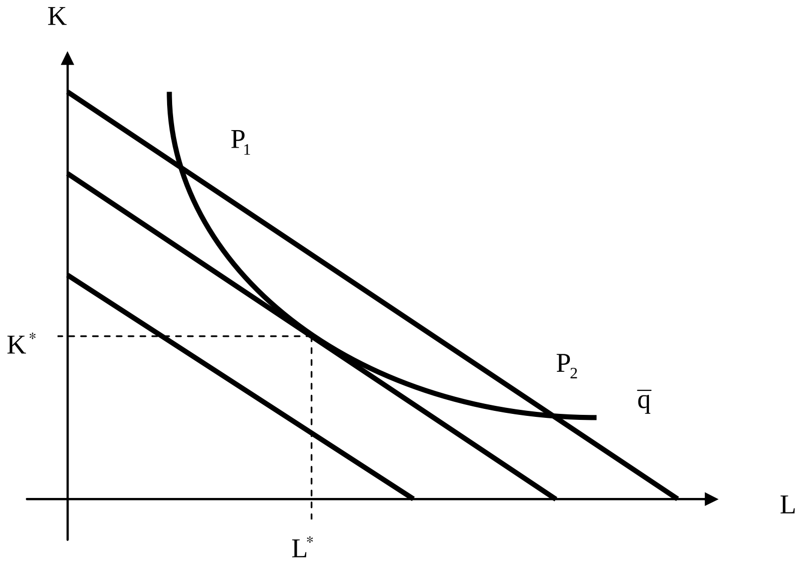
Mit jelent a fenti kifejezésben a $\frac{TC}{P_K}$ tag?

Miben különböznek az alábbi isocost-görbék egymástól?



VI. Optimális inputkombináció

Egy meghatározott kibocsátást különböző költségek mellett lehet elérni:



Látható, hogy a $\overline{q}$ termelési szint a P_1 és P_2 pontokban magasabb összköltségekkel állítható elő, mint az alatta lévő isocost-görbe esetén. Az origóhoz legközelebbi isocost-görbe viszont olyan költségszintet jelent, amely túl alacsony ahhoz, hogy a $\overline{q}$ termelési szintet elérjék. Az optimum, amelyben a rögzített kibocsátást minimális költségekkel állítják elő, tehát ott van, ahol valamelyik isocost-görbe az isoquant-görbét érinti, ebben az értelemben jelenti a $\left(K^*;L^*\right)$ tőke-munka-kombináció az optimális tényezőfelhasználást.

Ebben a helyzetben nyilván – ld. hasznosságelmélet – érvényes:

$$MRTS = \frac{dK}{dL} = \left|\frac{MP_L}{MP_K} = \frac{\frac{dq}{dL}}{\frac{dq}{dK}}\right| = \left|\frac{P_L}{P_K}\right|$$

Technikai helyettesítés határráta, azaz az isoquant-egyenes meredeksége	Határtermékek aránya	Tényezőárak aránya, azaz az isocost meredeksége

Gyakorló feladatok:

Miért szerepel a határtermékek aránya és a tényezőárak aránya abszolút értékben?