Műszaki folyamatok közgazdasági elemzése

Játékelméleti megközelítései

a) Története:
  - Társasjátékok elmélete (Zermelo)
  - Neumann János (minimax-tétel, azaz mikor létezik megoldás)
  - Neumann-Morgenstern: Game Theory and Economic Behavior (1944)

b) Játék: döntési helyzet, amelyben a szerepelők kölcsönös függnek egymástól

A játék leírásához szükséges:
- a játékosok halmaza,
- a stratégiák halmaza,
- visszajelzés, hogy mi a különböző stratégiakombinációk kimenetele („kifizetése”)

c) Játékok osztályozása:

- Statikus és dinamikus.
- Egyszeri és ismétlődő.
- Szimultán és szekvenciális.
- Kooperatív és nem kooperatív.

1. Néhány játék

a) A Csendes Óceán csatája

Egy japán tengerésztiszt parancsot kapott arra, hogy katonákat és hadi eszközöket A -ból B -be vigyen. Erre két útvonal áll a rendelkezésére: egy északi, amely 2 napi utazást jelent; és egy déli, amely 3 napos utazással jár. Egy amerikai repülőtiszt parancsot kapott a japán katonai szállítmány elpusztítására, azonban nem tudja, hogy a japán konvoj melyik úton fog haladni. Ha rossz irányba küldi a repülőgépeket, akkor veszít egy napot.

Az adatok alapján a következő táblázatot lehet megszerkeszteni (a stratégiák találkozásánál szereplő számpár első értéke a sorjátékosra – jelen esetben az amerikaira – vonatkozik, a második érték az oszlopjátékos kifizetését jelent; a konkrét értékek azt tükrözik vissza, hogy az amerikai repülőgépek hány napig bombázhatják a japánokat – pozitív előjel –, illetve a japánok mennyi ideig lesznek kénytelenek a bombázást elviselni – negatív előjel.):

		Japán	
		Észak	dél
Amerikai	észak	(2;-2)	(2;-2)
	dél	(1;-1)	(3;-3)

Megoldás: Ha a japán észak felé irányítaná csapatait, akkor az amerikai ellenfele jobban jár, ha a bombázókat szintén észak felé küldi, hiszen ekkor a kifizetés 2, ellenkező esetben pedig csak 1. Ha a japán hajók viszont dél felé indulnak, akkor az amerikai repülőgépek is dél felé haladva érnek el nagyobb kifizetést. Tehát az amerikai repülőtiszt mindig a japán tengerrész döntését „követi”. Fordítva: ha az amerikai repülőgépek északi irányba szállnának fel, akkor a japán fél nem tudja egyértelműen eldönteni, merre induljanak, hiszen mindkét esetben 2 napi bombázás vár rájuk. Amennyiben az amerikaiak dél felé tartanának, akkor a japán jobban járna, ha az északi útvonalat választaná. Tehát ha a japán „észak”-ot választ, akkor legrosszabb esetben abban a helyzetben lesz, mint amilyenben legjobb esetben lenne, ha dél felé küldené a hajókat. Nyilván észak irányába futnak ki a hajók. Ezt viszont az amerikai fél is tudja, azaz eleve az észak útvonalon keresik az ellenfél hajóit.

b) „A nemek harca”

Kapcsolatuk elején tartó párnak el kell döntenie, hogyan töltsék az estét. Legelső – közös – preferenciájuk az, hogy együtt legyenek. A fiú boxmeccsre szeretne menni, a lány az operába. A legrosszabb változat az volna, ha külön-külön töltenék az estét.
Ennek megfelelően legyenek adottak a következő preferenciák:

	3	2	1
Fiú	Együtt a boxmeccsre	Együtt az operába	Az estét egyedül tölteni – akár a boxmeccsen
lány	Együtt az operába	Együtt a boxmeccsre	Az estét egyedül tölteni – akár az operában

A hozzátartozó kifizetési mátrix:

		Fiú	
		Boxmeccs	Opera
Lány	Boxmeccs	(2;3)	(1;1)
	Opera	(1;1)	(3;2)

Gyakorló feladat:

Mutassa meg, hogy a fenti játéknak a B-B és O-O kombinációkkal két megoldása van! Ki dönti, hogyan döntheti el a játék kimenetelét?

c) „A nemek harca” II.

Változtassuk meg a játékot úgy, hogy a fiú preferenciái módosultak:

	3	2	1
Fiú	Egyedül boxmeccsre	Egyedül az operába	Az estét együtt tölteni
lány	Együtt az operába	Együtt a boxmeccsre	Az estét egyedül tölteni – akár az operában

Gyakorló feladat:

Írja fel a kifizetési mátrixot, és határozza meg a játék megoldását!

d) A fogoly-dilemma

Két betörőt (A-t és B-t) a rendőrség letartóztatta, amikor éppen kipakoltak egy lakást. Ez bizonyítható. Nem bizonyítható azonban, hogy a két rabló megölte a lakás idős tulajdonosnőjét, akit holtan találtak az egyik szobában. A betörők egybehangzóan azt állítják, hogy a hölgy már halott volt, mire ők a lakásba léptek.
Az igazság kiderítése érdekében az ügyész elkülöníti a két gyanúsítottat, hogy ne tudjanak egymással kommunikálni, és a következő alkut ajánlja: Ha továbbra is amellett marad mindkettő, hogy csak a betörést követték el, akkor csak ezért tudja őket elítélni, ami 1-1 év börtönbüntetést jelent. Ha viszont csak az egyik tagadja a gyilkosságot, a másik viszont az igazságszolgáltatással kooperálva kijelenti, hogy társa ölte meg az idős asszonyt, akkor a tagadó személyt gyilkosságért 10 évre elítéli, a másikat pedig elengedi. Ha mindketten kooperálnak, azaz egymást vádolják a gyilkossággal, akkor ezt nyilván együtt követték el, de mivel együttműködtek az ügyész 5-5 évre küldi mindkettőt a börtönbe.

A kifizetési mátrix a következő:

		A	
		Tagad	kooperál
B	tagad	(-1;-1)	(-10;0)
	kooperál	(0;-10)	(-5;-5)

Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy a „kooperál-kooperál” kombináció a megoldás – annak ellenére, hogy ez nem a legjobb eredmény. Ez ugyanis a tagadás lenne. A probléma az, hogy egyik gyanúsított sem tudja, mit vall a másik, vagyis ha ő tovább tagad, de a másik kooperál, akkor egy év börtön helyett 10 évre kerülne rács mögé. Ennél még mindig jobb az öt éves börtönbüntetés.

2. Fogalmak:

Valamely játék megadásához legalább három információ szükséges:

a) *a játékosok halmaza* $N = \{1,2,3,...,n\}$;

b) Az *i-edik játékos stratégiája* (s_i, $i = 1,2,...,n$) a lehetséges cselekvéseit jelenti, amelyek közül valamely döntési helyzetben választhat, az összes lehetséges stratégia alkotja a *stratégiahalamzát,* S_i, $i = 1,2,...,n$; nyilván $s_i \in S_i$. Mivel minden egyes játékos egynél több cselekvési lehetőséggel bír, ezért a stratégiák száma általában nem azonos a játékosok számával.

c) A kifizetés az az eredmény, amelyet valamely játékos elér, ha stratégiája egy másik játékos stratégiájával találkozik. Ha az *i*-edik játékos az $s_i \in S_i$ stratégiát választja és az ellenfele, a *j*-edik játékos az *j,* $s_j \in S_j$, stratégiát, $i, j = 1,2,3,...,n$, akkor $\pi_i(s_i; s_j)$-vel jelöljük az *i*-edik játékos kifizetését, $\pi_j(s_i; s_j)$-vel pedig a *j*-edik játékos kifizetését. A játékosok kifizetéseit az ún. *kifizetési mátrixban* foglaljuk össze; a kifizetési pár első eleme a „sorjátékosra", a második eleme az „oszlopjátékosra" vonatkozik. Az előzőekben említett játékosok számára tehát a következő kifizetési mátrix adódik:

		j	
		s_i^1	s_i^2
i	s_i^1	$\left(\pi_i(s_i^1; s_j^1); \pi_j(s_i^1; s_j^1)\right)$	$\left(\pi_i(s_i^1; s_j^2); \pi_j(s_i^1; s_j^2)\right)$
	s_i^2	$\left(\pi_i(s_i^2; s_j^1); \pi_j(s_i^2; s_j^1)\right)$	$\left(\pi_i(s_i^2; s_j^2); \pi_j(s_i^2; s_j^2)\right)$

d) Domináns stratégiák:

Legyen $s_i^* \in S_i$. Azt mondjuk, hogy $s_i^* \in S_i$ *szigorúan domináns,* ha minden $s_j \in S_j$, $i \neq j$, esetén: $\pi_i(s_i^*, s_j) > \pi_i(s_i', s_j)$, minden $s_i' \in S_i$-re. Más szavakkal: az *i*-edik játékos szigorúan domináns stratégiája bármilyen másik stratégiájánál mindig magasabb kifizetést eredményez, függetlenül attól, hogy az ellenfele melyik stratégiát választott.

Legyen $s_i^* \in S_i$. Azt mondjuk, hogy $s_i^* \in S_i$ *gyengén domináns,* ha minden $s_j \in S_j$, $i \neq j$ esetén: $\pi_i(s_i^*, s_j) \geq \pi_i(s_i', s_j)$, minden $s_i' \in S_i$-re, de legalább egy $\hat{s}_j \in S_j$ létezik, hogy $\pi_i(s_i^*, \hat{s}_j) > \pi_i(s_i', \hat{s}_j)$. Más szavakkal: az *i*-edik játékos gyengén domináns stratégiája sohasem vezet kisebb kifizetéshez, mint bármilyen másik stratégiája, függetlenül attól, hogy az ellenfele melyik stratégiát választ, de az *i*-edik játékosnak van legalább egy olyan stratégiája, amely egyértelműen magasabb kifizetést eredményez, mint bármelyik másik stratégiája.

Egy domináns stratégiájú játékot úgy lehet megoldani, hogy az egyértelműen rosszabb stratégiákat töröljük egy így a döntési lehetőségeket beszűkítjük.

Gyakorló feladat:

Mutassa meg, hogy a „Csendes Óceán csatája" játék domináns stratégiákat tartalmaz!

e) Nash-stratégia vagy „a legjobb válasz stratégiája"

Legyen $s_i^* \in S_i$. Azt mondjuk, hogy $s_i^* \in S_i$ *gyenge Nash-stratégia (NS)* vagy *gyenge legjobb-válasz-stratégia*, ha adott $s_j \in S_j$, $i \neq j$, esetén: $\pi_i(s_i^*, s_j) \geq \pi_i(s_i', s_j)$, minden $s_i' \in S_i$-re, azaz az *i*-edik játékos gyenge Nash-stratégia sohasem vezet kisebb kifizetéshez, mint a szóban forgó játékos bármelyik másik stratégiája az ellenfél stratégiaválasztását feltéve.

Következmény:

Minden gyengén domináns stratégia egyben gyenge Nash-stratégia is.

Legyen $s_i^* \in S_i$. Azt mondjuk, hogy $s_i^* \in S_i$ *szigorú Nash-stratégia (SNS)* vagy *szigorú legjobb-válasz-stratégia*, ha adott $s_j \in S_j$, $i \neq j$, esetén: $\pi_i(s_i^*, s_j) > \pi_i(s_i', s_j)$, minden $s_i' \in S_i \setminus s_i^*$-re, azaz azaz az *i*-edik játékos szigorú Nash-stratégia minden más stratégiájánál nagyobb kifizetést eredményez, az ellenfél stratégiaválasztását feltéve.

Következmény:

Minden szigorúan domináns stratégia egyben szigorú Nash-stratégia is.

f) Nash-egyensúly

*Nash-egyensúly*ról akkor beszélünk, ha minden játékos Nash-stratégiát választott, azaz $\pi_i(s_i^*, s_j^*) \geq \pi_i(s_j', s_j^*)$ minden $s_i^*, s_i' \in S_i$, $s_j^* \in S_j$ -re és minden *i* és *j* mellett.

Gyakorló feladatok:

Mutassa meg, hogy a „Nemek harca" c. játék B-B és O-O helyzetek Nash-egyensúlyok!

Mutassa meg, hogy a Marshall-kereszttel ábrázolt egyensúly kereslet és kínálat között Nash-egyensúly – függetlenül attól, hogy a szűkülő vagy a táguló pókháló-tétel érvényes!